www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE Session Mai 1990

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT

DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE C.F et C.T

Epreuve optionnelle de MATHEMATIQUES Durée : 4 heures Coef. : 2

NOTATIONS ET DEFINITIONS

IR désigne l'ensemble des nombres réels.

Log désigne la fonction logarithme népérien sur IR.

E désigne l'ensemble des suites réelles décroissantes au sens large, à termes positifs au sens large et non tous nuls.

S désigne l'ensemble des suites $u = (u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots)$ de E telles que la série de terme général u_n converge.

Un élément $u = (u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots)$ de E étant donné, on désigne par F_u la fonction numérique définie pour toute valeur de la variable réelle x telle que la série de terme général $(u_n\ x)^n$ converge par $F_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n\ x)^n$, avec la convention $(u_o\ x)^o = 1$.

T désigne alors l'ensemble des éléments u de E tels que la fonction F_u soit définie sur IR tout entier et que, de plus, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \text{Log}\,[F_u(x)]\ \frac{dx}{x^2}$ soit convergente.

n! désigne, pour tout n entier naturel non nul, le produit des n premiers entiers de 1 à n, encore appelé factoriel de n.

On rappelle la formule de Stirling :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\ e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1$, où e désigne l'exponentielle de 1 et π le nombre pi.

Remarque : Les candidats sont autorisés à admettre des résultats donnés par l'énoncé du problème et qu'ils n'arriveraient pas à démontrer pour traiter la suite du problème.

PROBLEME

Le but de ce problème est de montrer que les ensembles S et T définis ci-dessus sont identiques.

1°) Soit $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ un élément de E ; montrer que la fonction F_u est définie sur IR tout entier si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2°) λ étant un réel strictement positif, montrer que $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ appartient à T si et seulement si $\lambda u = (\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots \lambda u_n \ldots)$ appartient à T.

Tournez la page S.V.P.

3°) Soit $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ et $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n \ldots)$ deux éléments de E tels que $u_n \geq v_n$ pour tout n.

Montrer que si u appartient à T alors v appartient également à T.

4°) Soit u et v deux éléments de E tels que v_n soit non nul pour tout n et que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Etablir que u appartient à T si et seulement si v appartient à T.

5°) Discuter l'appartenance à E, S et T des trois suites suivantes :

a) $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$ $\quad u_n = (n!)^{-\frac{1}{n}}$

b) $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$ $\quad u_n = ((2n)!)^{-\frac{1}{n}}$

c) $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$ $\quad u_n = n^{-1-\frac{1}{n}}$

6°) Déterminer l'ensemble des réels t strictement positifs tels que la série $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ soit convergente et de somme inférieure à 1 au sens large.

7°) Soit une suite u appartenant à S.

a) Montrer que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

b) Montrer que la suite de terme général $n\,u_n$ converge et donner sa limite.

c) Etablir la convergence pour tout x réel de la série de terme général $n(u_n\, x)^n$.

Soit $G_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(u_n\, x)^n$; montrer que F_u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre G_u et F'_u.

8°) On suppose dans cette question que u appartient à S et que u_n n'est nul pour aucune valeur de n. On reprend la définition de la fonction numérique G_u associée à u donnée à la question précédente.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout x de $\left[0, \frac{1}{3u_{n+1}}\right]$, on a :

$$G_u(x) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} k\,(u_k\, x)^k \qquad \text{et} \qquad G_u(x) \leq n\, F_u(x).$$

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire la convergence de la série de terme général

$$a_n = \int_{\frac{1}{3u_n}}^{\frac{1}{3u_{n+1}}} \frac{G_u(x)}{F_u(x)} \frac{dx}{x^2} .$$

c) Montrer la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{G_u(x)}{F_u(x)} \frac{dx}{x^2}$.

d) Montrer que $\int_1^{+\infty} \text{Log } F_u(x) \frac{dx}{x^2}$ converge.

9°) Montrer que S est inclus dans T.

10°) Pour toute suite u appartenant à E et n entier on pose

$s_n = \sum_{k=o}^{n} u_k$.

Montrer que $m \leqslant n$ entraîne $s_m - m\, u_{n+1} \leqslant s_n - n\, u_{n+1}$

11°) On suppose dans cette question que la suite u appartient à E mais non à S, et que de plus elle a une limite nulle.

a) Montrer que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ diverge.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant \frac{e}{u_n}$ montrer que

$\text{Log } F_u(x) \geqslant n$.

c) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \text{Log } F_u(x) \frac{dx}{x^2}$ diverge.

12°) Montrer que S = T.

* *
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail